数理解析研究所講究録
245巻 1975年 2-16

位相空間上の力学系

慶大 工　　齋藤利弥

1. ふつう採用されている力学系（抽象力学系）の定義は次のようなものである.

Xを位相空間, $\mathbb{R}$を実数全体の集合, πを$X \times \mathbb{R}$からXへの写像で次の性質を満たすものとする.

a)　πは連続な写像である.

b)　$\pi(x, 0) = x$.

c)　$x \in X$, $t, s \in \mathbb{R}$, $\pi(x, t) = y$ のとき

$$\pi(y, s) = \pi(x, t+s).$$

このときXを相空間とする力学系が与えられたといい, それを$(X, \mathbb{R}, \pi)$で表す. これは, よく知られているように, Poincaré が提唱した, 微分方程式の定性的理論を抽象的にとりあつかうためにつくられた概念である.

2. この定義を微分方程式論の立場から少し検討してみよう.

Xを$\mathbb{R}^n$の開集合，$f(x)$ $(x \in X)$ をXから$\mathbb{R}^n$への連続な写像とし，微分方程式

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x)$$

をX上で考える．Peanoの存在定理により，(1)の初期値問題の解はつねに存在する．さらに$f(x)$に適当な素直さ（たとえばLipschitzian）を仮定すると，その解は一意性をもつ．そしてその解は，延長とよばれる手続きによって，その定義域をひろげることができる．

$t=0$で$x \in X$を通る(1)の延長不能解（すなわち解が延長できる限りその定義域をひろげてしまったもの）を考え，これを$\pi(x,t)$と書くと，これは次の性質をもつことが知られている．

1) xをとめたとき，$\pi(x,t)$は$\mathbb{R}$の開区間$I_x = (\alpha_x, \omega_x)$で定義される．ただし$-\infty \leqq \alpha_x < 0 < \omega_x \leqq \infty$で，$t \to \omega_x$および$t \to \alpha_x$のとき，点$(\pi(x,t), t)$は$X \times \mathbb{R}$の境界に限りなく近づく．したがってもし，$\omega_x < \infty$ $(\alpha_x > -\infty)$ならば$t \to \omega_x$ $(t \to \alpha_x)$のとき$\pi(x,t)$はXの境界に限りなく近づく．

2) $\pi(x,t)$は(x,t)に関し連続である．

3) $\pi(x,0) = x$.

4) $t \in I_x$, $y = \pi(x, t)$, $s \in I_y$, $t+s \in I_x$ ならば

$$\pi(y, s) = \pi(x, t+s).$$

ここで，1) は延長不能解の存在に関する定理，2) は初期値に関する連続性，3) は初期条件そのもの，4) は解の一意性と，(1) の右辺が t を含まないこと（すなわち，(1) が autonomous system であること）からの帰結である．

もちろん $\pi(x, t)$ はこの他にもいろいろな性質をもっている．たとえば $\pi(x, t)$ は t について（連続であるのみならず）微分可能でもある．しかし定性的理論ということばをもっとも弱く解釈して $\pi(x, t)$ で表される X の中の曲線 — すなわち軌道の topological behaviour をしらべるという意味にとらえれば，上記の 1) 〜 4) がもっとも基本的な性質であると考えてもよいであろう．いいかえれば，微分方程式論の基本定理から直接導かれるこれら4つの性質だけから，$\pi(x, t)$ の性質についてどれだけのことがいえるかをつきとめておくことは微分方程式の定性的理論の出発点としては，まず妥当だと思われる．

ところで X を R^n の中の開集合と考えることは，微分方程式論の枠の中で考えても強すぎる制限である．たとえば (1) が積分をもっているとき，それを利用して方程式の数を減らすことは，微分方程式を解くときの常套手段である．その結果

得られる方程式はやはり(1)のような形をしているが，$f(x)$ の定義域は積分曲面 — ふつうは多様体 — である．そこでこの制限を思い切ってゆるめてしまおう．

さらに微分方程式の解の性質のうち 1)～4) から導かれるもの以外はすべて捨象してしまうのだから，むしろ，性質 1)～4) によって定義されるものをわれわれの研究の対象としてとりあげるほうが自然であろう．

3. 以上のことを考えて，次のような定義をつくってみる．

X を位相空間とし，$X \times \mathbb{R}$ の開集合 D と，D から X への写像 π で，次の性質を満たすものが与えられているとする．

I) D は $\bigcup_{x \in X} \{x\} \times I_x$ のような形をもつ．ただし I_x は $\mathbb{R}$ の開区間 (α_x, ω_x) で $-\infty \leqq \alpha_x < 0 < \omega_x \leqq \infty$.

II) π は連続である．

III) $\pi(x, 0) = x$.

IV) $t \in I_x$, $\pi(x, t) = y$, $s \in I_y$, $t + s \in I_x$ ならば
$$\pi(y, s) = \pi(x, t+s).$$

V) $\omega_x < \infty$ ならば $L^+(x) = \phi$. $\alpha_x > -\infty$ ならば $L^-(x) = \phi$. ただし $L^+(x)$ ($L^-(x)$) は $t \to \omega_x$ ($t \to \alpha_x$) のときの $\pi(x, t)$ の cluster set である．すなわち
$$L^+(x) = \bigcap_{\tau \in I_x} \overline{\bigcup_{t \geqq \tau} \{\pi(x, t)\}}, \quad L^-(x) = \bigcap_{\tau \in I_x} \overline{\bigcup_{t \leqq \tau} \{\pi(x, t)\}}.$$

このときpair (D, π) をXを相空間とする局所力学系(local dynamical system)とよぶ．1)〜4)と上記のI)〜V)とが次のように対応していることは明かであろう．

1) → I)+V), 2) → II), 3) → III), 4) → IV)

4. 局所力学系の定義において，さらに

(2) $$I_x = \mathbb{R} \quad \text{for } \forall x \in X$$

という条件をつけ加えると，最初に述べた力学系の定義が得られる．

微分方程式(1)が条件(2)を満足しているとき，(1)はglobal existence propertyをもつという．したがって，はじめに述べた力学系の定義はglobal existence propertyをもつ微分方程式をとりあつかうには適切な抽象化であろう．その意味でこれを大域力学系(global dynamical system)とよぼう．

Xがcompactな位相空間であるならば，(1)は確かにglobal existence propertyをもつ．しかし一般にはこれはきわめて強い条件である．たとえば力学系の理論の源ともいうべき天体力学において，天体間の衝突がおこる場合にはこの性質がなりたたない．したがって衝突を含んだ多体問題を大域力学系のframeworkの中で処理することはできない．

もっともこの点については1つの逃げ道が用意されている．それは適当な reparametrization (time change) を行うことにより(1)はつねに global existence property をもつ方程式に変換できる — という Vinograd の定理である．

これが多くの場合に有効な逃げ道になっていることは間違ないが，果してすべての場合がこの定理で救われるのだろうか．もしそうならば，Xがもっと大きい空間にうめこまれている場合，その境界点の近傍における軌道の行動と，特異点(あるいは不動点)の近傍における軌道の行動との間には，本質的な相違はないことになる．これは本当だろうか．

5．局所力学系に関して，いくつかの注意をつけ加えておく．大域力学系は，それを不変集合の上に制限すればやはり大域力学系になるけれども，任意の集合の上に制限したのでは，もちろん大域力学系にならない．しかし任意の開集合の上に制限すれば局所力学系になる．このために，局所力学系の研究は，大域力学系の軌道の局所的研究にとって強力な道具となる．

もう1つの注意は，微分方程式論との，より精密な対応についてである．1)〜4)は微分方程式の延長不能解の性質を抽象したものである．ところが延長不能解というのは，local

な解に延長(extension)という操作を可能な限り施して得られるものである.

さて,局所力学系の定義において,I)をすこし変え,V)をとり去る.これだけの条件で定義されるものをgermとよぶことにすると,これはまさに微分方程式のlocalな解を抽象化したものとみなされる.そして1つのgermからはただ1つの局所力学系が生成されることが証明できる.このことはlocalな解から延長不能解をつくる手続が,微分方程式よりもはるかに一般な局所力学系たおいても可能であることを示している.

このことは重要であると思われる.というのは局所力学系は相空間としてきわめて一般な位相空間をとっているので,微分方程式以外の関数方程式をもその枠の中に組み込み得る可能性をもっている.その場合localな存在および一意性の定理がなりたってgermが形成されれば,上の事実から延長不能解の存在が保証され,局所力学系としてのとりあつかいが可能なことがわかることになる.

6. 一般に力学系といえば大域力学系のことである.これは局所力学系という概念がきわめて新しく,しかもとりあつかいははるかに難しいために,研究成果に見るべきものが少い

からである．これに比べて大域力学系は，その概念が今世紀のはじめにつくられて以来，今日までに極めて豊富な成果をあげている．そこで以下では大域力学系に話を限り，これをたんに力学系とよぶことにする．

性質 a), b), c) を基にして力学系の性質を体系的に研究した最初の人は G. D. Birkhoff である．彼はその基本的な部分をほとんど独力でやりとげてしまった．そこで Birkhoff の仕事を中心にして，力学系の一般的な研究方針をまとめてみよう．この際利用できる主要な武器は general topology である．それ以外に，場合によってはいくらかの代数的手法（たとえば位相群の理論）が援用できる．それは力学系の定義の中に代数的構造 c) が含まれているためである．

$x \in X$ に対して

$$C(x) = \bigcup_{t \in R} \{\pi(x,t)\},$$

$$L^+(x) = \bigcap_{\tau \in R} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} \{\pi(x,t)\}}, \quad L^-(x) = \bigcap_{\tau \in R} \overline{\bigcup_{t \leq \tau} \{\pi(x,t)\}}$$

とおく．$C(x)$ は<u>軌道</u>，$L^+(x)$, $L^-(x)$ はそれぞれ<u>ω 極限集合</u>，<u>α 極限集合</u>とよばれる．

$C(x)$ を，それと $L^{\pm}(x)$ との関係にしたがって次のように分類する．

i) $L^+(x) = \phi$: positively receding

ii) $L^-(x) = \phi$: negatively receding

iii) $L^+(x) \neq \phi$, $C(x) \cap L^+(x) = \phi$: positively asymptotic

iv) $L^-(x) \neq \phi$, $C(x) \cap L^-(x) = \phi$: negatively asymptotic

v) $L^+(x) \neq \phi$, $C(x) \cap L^+(x) \neq \phi$: positively Poisson stable

vi) $L^-(x) \neq \phi$, $C(x) \cap L^-(x) \neq \phi$: negatively Poisson stable

vii) v) & vi): Poisson stable

簡単のために今後はXはcompactとする．このときはつねに$L^{\pm}(x) \neq \phi$だからreceding orbitは存在しない．また$L^{\pm}(x)$はcompactな不変集合である．

大ざっぱにいうとasymptoticな軌道は$t \to \infty$ ($t \to -\infty$)のとき$L^+(x)$ ($L^-(x)$)に吸いこまれてしまうので，その漸近的行動は$L^+(x)$ ($L^-(x)$)の近傍の研究，いわゆるlocal theoryで処理できる．これに反してPoisson stableな軌道は$t \to \infty$ ($t \to -\infty$)のとき，軌道上の任意の点のいくらでも近い所にもどってくるので，その研究には本質的にglobalな考察が必要である．特異点と周期軌道とは例外的に簡単なPoisson stable orbitであるが，それ以外のものは一般に複雑な行動をとる．

そこで問題を整理して，理論をlocal partとglobal partとに分けることを考えてみよう．

$x \in X$とする．xの近傍Uを適当に小さく，$\tau > 0$を適当に大きくとると，$t > \tau$ならば$\pi(U, t) \cap U = \phi$となると

きxは<u>wandering point</u>であるという．（このとき実は$|t|>\tau$ならば$\pi(U,t)\cap U=\phi$となる．）

Xの中のwandering point全体の集合をW_1とする．W_1は開不変集合である．$X-W_1=X_1$とおくとX_1はもちろん閉（したがってコンパクト）不変集合になる．はじめの力学系のX_1の上へのrestrictionを$(X_1,\mathbb{R},\pi)$とする．

$(X_1,\mathbb{R},\pi)$のwandering pointの全体をW_2とし，$X_1-W_2=X_2$とする．

$(X_2,\mathbb{R},\pi)$のwandering pointの全体をW_3とし，$X_2-W_3=X_3$とする．

この手續をくりかえしていくと，ある順序数αが存在して$(X_\alpha,\mathbb{R},\pi)$はwandering pointをもたない力学系になる．すなわちこの手続は，ここで終る．

X_αは$(X,\mathbb{R},\pi)$のPoisson stableな軌道全体の集合のclosureと一致する．

<u>上</u>記のことはBirkhoffによって証明された．彼はX_αを<u>set of central motions</u>とよんだ．

7．xがある軌道$C(y)$の極限集合$L^{\pm}(y)$に属しているならば，それはwandering pointではない．したがって$x\in W_k$ならば$L^{\pm}(x)\subset X_k$．すなわち，$X_{k-1}=W_k\cup X_k$という分

解により，力学系 (X_{k-1}, R, π) は (W_k, R, π) と (X_k, R, π) とに分解され

1) (W_k, R, π) においては，すべての点が wandering point であり，したがってすべての軌道は（正にも負にも）receding である．

2) $|t|$ が十分大きいと，$\pi(x, t)$ $(x \in W_k)$ は X_k の近傍にはいりこんでしまう．

1) のような性質をもつ力学系を，<u>完全に不安定な力学系</u>（completely unstable system）とよぶ．すなわち，力学系 (X_{k-1}, R, π) の研究は

A) 完全に不安定な力学系の構造をしらべること，

B) コンパクトな不変集合 X_k の近傍での軌道の行動をしらべること，

の2つの部分に分離される．

ところが (X_α, R, π) はもはや wandering point をもたないから，このような分離は不可能で，われわれは研究の最終段階として

C) wandering point を1つももたない力学系の構造をしらべること，

という問題を解かねばならない．このように考えれば，一般に力学系の研究は global part A), C) と local part B) と

に分けられ，その中間に，コンパクトな不変集合の列

$$X \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_\alpha$$

を見いだすという問題が介在する．この問題をD）となずけよう．

これら4つの問題のうちでいちばん難しいのはおそらくC）であり，B）とD）がこれに次ぐのではないかと思われる．

力学系が保測性をもつ場合にはPoincaréの回帰定理により $X = X_\alpha$ となるので，いちばん難しい問題C）にはじめから直面しなくてはならない．

PoincaréとBendixsonが研究した S^2 上の力学系では，X_α は特異点と周期軌道をあわせたものになる．したがって，(X_α, R, π) の構造はもはやしらべる必要がなく，問題C）は存在しない．さらにこの場合には，(W_k, R, π) はすべて平行化可能な力学系（parallelizable system）とよばれる簡単な構造をもつことが証明される．それゆえ問題はA）とD）とにしぼられる．ところがlocal part A）は上記2人によって殆ど完全に解決されている．したがってD）だけがこの理論に残されている唯一の難い問題となる．

8．はじめに述べた局所力学系，およびそのgermという概念は浦によるものである．これに関しては次のような文献が

ある.

浦 太郎, 特性曲線の延長と安定の問題, 数学 9(1958), 137～148, 218～235

T. Ura, Sur le courant extérieur à une région invariante; Prolongement d'une caractéristique et l'ordre de stabilité, Funkcial. Ekvac. 2(1959), 105～143

T. Ura, Isomorphisms and local characterization of local dynamical systems, Funkcial. Ekvac. 12 (1969), 99～122

O. Hájek, Structure of dynamical systems, Comment. Math. Univ. Carolinae Progensis, 6(1965), 53～72

G. R. Sell, Non-autonomous differential equations and topological dynamics I, Trans. Amer. Math. Soc. 127 (1967), 241～262

S. Ahmad, On Ura's axioms and local dynamical systems, Funkcial. Ekvac. 12 (1969), 181～191

Birkhoff の理論は, もはや古典的な結果というべきものであって, いろいろな書物にまとめられている. たとえば次の書物を参照されたい.

V. V. Nemytskii & V. V. Stepanov, Qualitative theory of differential equations (Part II), Princeton (1960)

V. V. Nemytskii, Topological problems of the theory of dynamical systems, A. M. S. Translations, 103 (1954), 85～168

斉藤 利弥, 位相力学 共立出版(1971)

最後に問題をA), B), C), D)の4つに整理したが, このうちA)に関してはNemytskiiの重要な結果がある. これは上にあげたNemytskii - Stepanovの書物に述べられている.

B)については不変集合の安定性を中心として, いろいろな結果が得られており, その多くのものは

N. P. Bhatia & G. P. Szegö, Stability theory of dynamical systems, Springer (1970)

に集められており, また, これにもれている新しい結果の一部は, 上掲の斉藤の書物に述べられている.

C)については筆者はあまりくわしいことを知らない. 上掲のNemytskii - Stepanovの書物や, 斉藤の書物には1940年代頃までに得られた結果が述べられている. それ以後の新しい結果については, 論文を調べる以外に方法がないのではないかと思う. この問題に詳しい方の御教示が得られれば幸である.

D) に関する結果は，あまり得られていないようである．しかしこの問題は local と global とをつなぐ重要な意味をもっているように筆者には思われる．筆者はかつてこの方向を目ざしていくつかの論文を書いたが，その結果は上掲の斉藤の書物に集められている．